Mathematik 6	M 6.1 Rationale Zahlen M 6.1.1 Bruchteile und Bruchzahlen (1)	*AKG Schwabach*

Bruchteil:

Bruch $\left\{ \frac{z}{n} \right.$ Zähler, Nenner

$\frac{z}{n}$ eines Ganzen bedeutet:

Man teilt das Ganze in n gleiche Teile und nimmt z von diesen Teilen.

eine „ganze“ Pizza **$\frac{1}{8}$ der Pizza (lies: „ein Achtel“)** $\frac{3}{4}$ $\boldsymbol{von\ 32\ kg:\ (32kg : 4)\cdot 3 = 8kg\cdot 3 = 24kg}$

Erweitern und Kürzen eines Bruches:

Erweitern	Kürzen
Man multipliziert Zähler und Nenner mit derselben natürlichen Zahl ($\neq 0$). $\frac{4}{5} = \frac{4\cdot 3}{5\cdot 3} = \frac{12}{15}$	Man dividiert Zähler und Nenner durch dieselbe natürliche Zahl ($\neq 0$). $\frac{15}{20} = \frac{15:5}{20:5} = \frac{3}{4}$

Bruchzahlen:

Zahlen, die durch Brüche angegeben werden, heißen **Bruchzahlen**. Eine Bruchzahl kann durch **verschiedene wertgleiche** Brüche angegeben werden **($\frac{12}{18}; \frac{2}{3}; \frac{4}{6}; \frac{6}{9}; \frac{120}{180}$)**. Jede natürliche Zahl ist eine Bruchzahl **($1 = \frac{1}{1}; 2 = \frac{2}{2}; 3 = \frac{3}{3}; \ldots$)**.

Mathematik 6	M 6.1 Rationale Zahlen M 6.1.1 Bruchteile und Bruchzahlen (2)	*AKG Schwabach*

Eigenschaften von Bruchzahlen:

Bruchzahlen als Quotient	Größenvergleich von Brüchen
Es gilt: $z : n = \frac{z}{n}$ **Bsp.:** $\mathbf{24 : 36 = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}}$	Um Brüche zu vergleichen, kann man sie **gleichnamig** (= Nenner gleich) machen. **Bsp.: Vergleiche $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{5}$.** $\frac{2}{3} = \frac{2\cdot 5}{3\cdot 5} = \frac{10}{15}$ $\frac{3}{5} = \frac{3\cdot 3}{5\cdot 3} = \frac{9}{15}$ → $\frac{3}{5} < \frac{2}{3}$

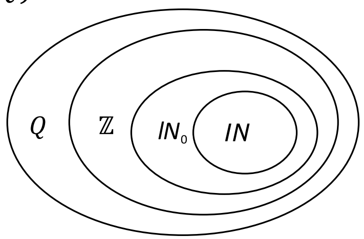
Rationale Zahlen:

Die positiven und negativen Bruchzahlen bilden zusammen mit der Null die Menge der rationalen Zahlen (Q).

Bsp.:

$\frac{2}{3} \in Q$ **aber:** $\frac{2}{3} \notin IN$

$-2 \in Q$ **und** $-2 \in \mathbb{Z}$



Mathematik 6	# M 6.1 Rationale Zahlen M 6.1.2 Dezimalbrüche	*AKG Schwabach*

Dezimalbrüche:

	,	Zehntel (z)	Hundertstel (h)	Tausendstel (t)		als Bruch
37	,	1	3	5		$37\frac{135}{1000}$
187	,	0	0	2		$187\frac{2}{1000}$
9889	,	2	0	4		$9889\frac{204}{1000}$

Umwandeln von Brüchen in Dezimalbrüche	Runden von Dezimalbrüchen
Man bringt, falls möglich, den Nenner auf eine Zehnerpotenz oder man dividiert den Zähler durch den Nenner. Das Ergebnis einer Division kann auch ein periodischer Dezimalbruch sein. $\frac{12}{75} = \frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 0,16$ $\frac{49}{35} = \frac{7}{5} = 7:5 = 1,4$ $\frac{7}{3} = 7:3 = 2,33\ldots = 2,\overline{3}$	Es gelten die gleichen Regeln wie bei natürlichen Zahlen. $123,74 \approx 124\ (auf\ E\ gerundet)$ $74,0054 \approx 74,0\ (auf\ z\ gerundet)$ $-1,0855 \approx -1,086\ (auf\ t\ gerundet)$

Mathematik 6	M 6.1 Rationale Zahlen M 6.1.3 Addition und Subtraktion rationaler Zahlen	*AKG Schwabach*

Addieren und Subtrahieren von Brüchen

- Brüche müssen den gleichen Nenner haben
- Zähler addieren/subtrahieren und Nenner beibehalten

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{14}=\frac{21}{28}+\frac{10}{28}=\frac{31}{28}=1\frac{3}{28}$$

$$\frac{4}{12}-\frac{1}{9}=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{3}{9}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$$

Addieren und Subtrahieren gemischter Zahlen

- Brüche gleichnamig machen
- Ganzen und Brüche getrennt voneinander addieren/subtrahieren

oder

- Brüche gleichnamig machen und gemischte Zahlen in Brüche umwandeln

$$2\frac{4}{5}+3\frac{1}{2}=2\frac{8}{10}+3\frac{5}{10}=5\frac{13}{10}=6\frac{3}{10}$$

$$5\frac{1}{4}-2\frac{5}{6}=\frac{21}{4}-\frac{17}{6}=\frac{63}{12}-\frac{34}{12}=\frac{29}{12}=2\frac{5}{12}$$

Addieren und Subtrahieren von Dezimalbrüchen

- wie bei ganzen Zahlen: stellenweise addieren/subtrahieren
- Komma muss unter Komma stehen

		3	6	4	,	1	6
	+	4	9	8	,	8	8
		1	1	1		1	
		8	6	3	,	0	4

		1	2	3	,	1	2
		1	1	1		1	
	-		9	7	,	8	9
			2	5	,	2	3

Geschicktes Rechnen mit Brüchen und Dezimalbrüchen

- Summanden dürfen vertauschen werden (Kommutativgesetz);
- Klammern dürfen beliebig vertauscht und umgesetzt werden (Assoziativgesetz)

$$2\frac{1}{5}-1,7+\frac{1}{4}+\frac{7}{12}=2,2-1,7+\frac{3}{12}+\frac{7}{12}=0,5+\frac{10}{12}=\frac{3}{6}+\frac{5}{6}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$$

Mathematik 6	M 6.1 Rationale Zahlen M 6.1.4 Multiplikation und Division rationaler Zahlen (1)	*AKG Schwabach*

Vervielfachen und Teilen von Brüchen	Multiplikation von Brüchen
Es gilt: $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$ $(b \neq 0)$ $\quad und \quad$ $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$ $(b, c \neq 0)$ $\mathbf{\frac{4}{9} \cdot 5 = \frac{4 \cdot 5}{9} = \frac{20}{9}}$ $\mathbf{\frac{3}{7} : 4 = \frac{3}{7 \cdot 4} = \frac{3}{28}}$	Man multipliziert zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ miteinander, indem Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert werden. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad (b, d \neq 0)$ $\mathbf{\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 3} = \frac{10}{21}}$ $\qquad$ $\mathbf{\frac{12}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{12 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 1} = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}}$ *Tipp: Erst kürzen!*

Division von Brüchen	Potenzschreibweise
Man dividiert einen Bruch $\frac{a}{b}$ durch einen Bruch $\frac{c}{d}$, indem der Dividend mit dem Kehrbruch des Divisors multipliziert wird. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad (b, c, d \neq 0)$ $\mathbf{\frac{35}{44} : \frac{10}{11} = \frac{35}{44} \cdot \frac{11}{10} = \frac{35 \cdot 11}{44 \cdot 10} = \frac{7 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{7}{8}}$	Der Exponent bei Potenzen kann auch negativ sein. Es gilt für rationale Zahlen q $(\neq 0)$ und natürliche Zahlen n: $q^{-n} = \frac{1}{q^n}$ $\mathbf{5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{125}}$ $\mathbf{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 1 : \frac{1}{8} = 1 \cdot \frac{8}{1} = 1 \cdot 8 = 8}$

Mathematik 6	# M 6.1 Rationale Zahlen M 6.1.4 Multiplikation und Division rationaler Zahlen (2)	*AKG* *Schwabach*

Multiplikation von Dezimalbrüchen:

1. Man multipliziert zunächst ohne Berücksichtigung des Kommas.
2. Das Komma wird anschließend so gesetzt, dass das Ergebnis ebenso viele Stellen nach dem Komma hat wie beide Faktoren zusammen.

		6,	3	5	·	2,	1	
			1	2	6	0		
					6	3	5	
				1				
			1	3,	2	3	5	

Tipp: Durch eine gegensinnige Kommaverschiebung kann die Rechnung oft vereinfach werden!

$$\mathbf{4000 \cdot 0,0012 = 4 \cdot 1,2 = 4,8}$$

Division von Dezimalbrüchen:

1. Fall: Divisor ist eine natürliche Zahl	2. Fall: Divisor ist ein Dezimalbruch
Man geht wie bei der Division natürlicher Zahlen vor und setzt beim Überschreiben des Kommas im Dividenden auch im Ergebnis ein Komma.	Man formt mithilfe der **gleichsinnigen Kommaverschiebung** so um, dass der Divisor eine natürliche Zahl ist.

	3	7,	8	:	1	4	=	2,	4	
-	2	8								
		9	8							
	-	9	8							
			0							

		2,	5	1	7	:	0,	0	6	=			
		2	5	1,	7	:	6	=	4	1,	9	5	
	-	2	4										
			1	1									
		-		6									
				5	7								
			-	5	4								
					3	0							
				-	3	0							
						0							

Mathematik 6	M 6.1 Rationale Zahlen M 6.1.5 Verbindung der Grundrechenarten bei rationalen Zahlen	*AKG Schwabach*

Wiederholung Rechenregeln:

Es gelten dieselben Regeln wie bei ganzen Zahlen:

Wiederholung Rechengesetze:

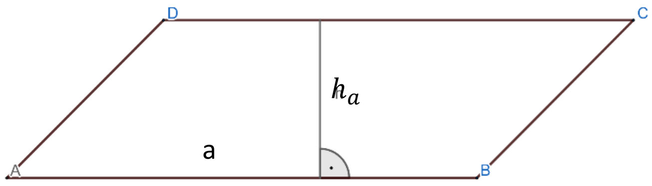
Für alle rationalen Zahlen a, b, c gilt:

Gesetz	Beispiel
Kommutativgesetz: $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$	$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ $\quad 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 2$
Assoziativgesetz: $a + (b + c) = a + b + c = (a + b) + c$ $a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c$	$\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{5}$ $\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{15}{3} \cdot \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{3}\right) \cdot \frac{1}{4}$
Distributivgesetz: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ $(a + b) : c = a : c + b : c$	$\left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{12}{13} = \frac{3}{4} \cdot \frac{12}{13} + \frac{5}{6} \cdot \frac{12}{13}$ $\left(\frac{7}{8} + \frac{2}{3}\right) : 2 = \frac{7}{8} : 2 + \frac{2}{3} : 2$

Klammern vor → **Potenzen** vor → **Punktrechnung** vor → **Strichrechnung**

Mathematik 6	M 6.2 Flächeninhalt und Volumen M 6.2.1 Flächeninhalt (1)	*AKG Schwabach*

Flächeninhalt eines Parallelogramms:



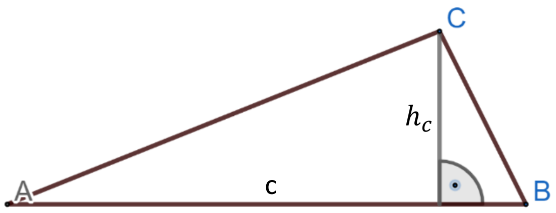
$$A = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

$\boldsymbol{h_a}$ ist die Höhe:
Abstand zweier paralleler Seiten

Bsp.: $\boldsymbol{a = 8cm \quad h_a = 3cm}$

$\boldsymbol{A = a \cdot h_a = 8cm \cdot 3cm = 24cm^2}$

Flächeninhalt eines Dreiecks:



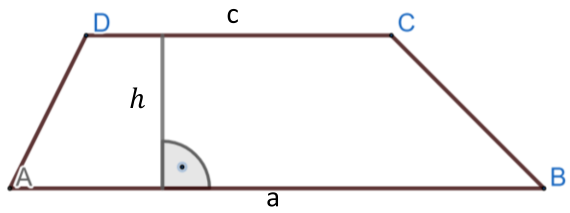
$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

In jedem Dreieck gibt es drei Höhen.

Bsp.: $\boldsymbol{c = 9cm \quad h_c = 3cm}$

$\boldsymbol{A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 9cm \cdot 4cm = 18cm^2}$

Flächeninhalt eines Trapezes:



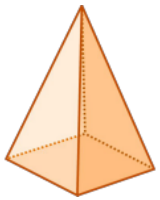
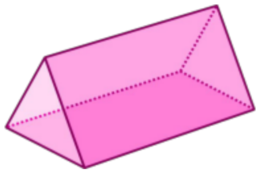
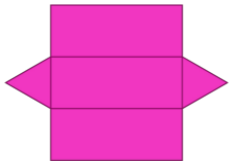
$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$$

Bsp.: $\boldsymbol{a = 9cm \quad c = 5cm \quad h = 3cm}$

$$\boldsymbol{A = \frac{1}{2} \cdot (9cm + 5cm) \cdot 3cm}$$
$$\boldsymbol{= \frac{1}{2} \cdot 14cm \cdot 3cm}$$
$$\boldsymbol{= 7cm \cdot 3cm = 21cm^2}$$

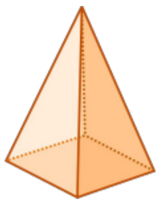
Mathematik 6	M 6.2 Flächeninhalt und Volumen M 6.2.1 Flächeninhalt (2)	*AKG Schwabach*

Körper:

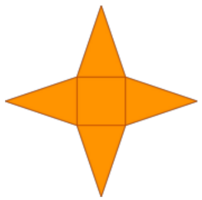
Pyramide	(gerades) Prisma
• ein Körper mit der Grundfläche eines Vielecks • alle Seitenflächen sind Dreiecke 	• ein Körper mit Grund- und Deckfläche aus zwei deckungsgleichen Vielecken • die Seitenflächen sind Rechtecke  

Netz eines Körpers:

Wird die Oberfläche eines Körpers längs geeigneter Kanten aufgeschnitten und in der Zeichenebene ausgebreitet, so erhält man ein Netz des Körpers.



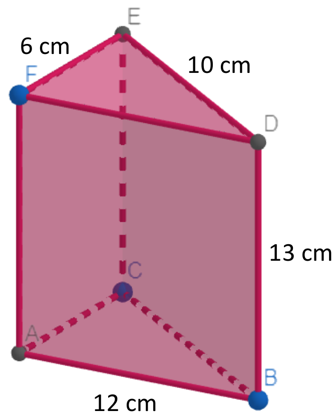
Pyramide



Netz der Pyramide

Oberflächeninhalt eines Körpers:

Der Oberflächeninhalt O eines Körpers ist gleich dem Flächeninhalt seines Netzes.



Höhe des Dreiecks: 4 cm

$$O = 2 \cdot A_{Dreieck} + A_{Rechteck1} + A_{Rechteck2} + A_{Rechteck3}$$

$$O = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12cm \cdot 4cm + 6cm \cdot 13cm + 10cm \cdot 13cm + 12cm \cdot 13cm = 414cm^2$$

Mathematik 6	M 6.2 Flächeninhalt und Volumen M 6.2.2 Volumen	*AKG Schwabach*

<u>Volumen:</u> Das Volumen gibt an, welchen Raum ein Körper einnimmt. (…³ = Kubik)

Volumeneinheiten:

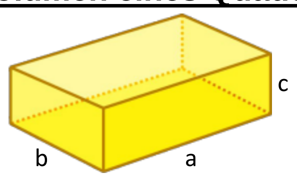
1mm³	1cm³	1dm³	1m³

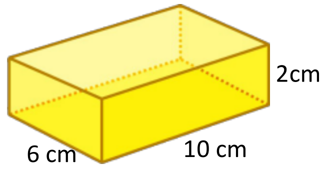
1m³ = 1000dm³
1dm³ = 1000cm³
1cm³ = 1000mm³

Außerdem gilt:

$1l = 1dm^3 \qquad 1\,hl = 100l \qquad 1l = \frac{1}{1000}l = \frac{1}{1000}dm^3 = 1cm^3$

<u>Volumen eines Quaders:</u>

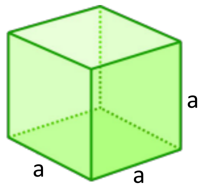


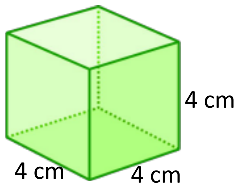


$\boldsymbol{V = a \cdot b \cdot c}$

$\boldsymbol{V = 10cm \cdot 6cm \cdot 2cm = 120cm^3}$

<u>Volumen eines Würfels:</u>





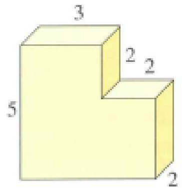
$\boldsymbol{V = a \cdot a \cdot a}$

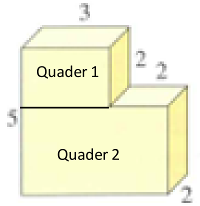
$\boldsymbol{V = 4cm \cdot 4cm \cdot 4cm = 64cm}$

<u>Volumen verschiedener Körper:</u>

➔ Zerlege den Körper in verschiedene Quader!

(Einheiten in m)





Volumen Quader 1:

$\boldsymbol{V_1 = 3m \cdot 2m \cdot 2m = 12m^3}$

Volumen Quader 2:

$\boldsymbol{V_2 = 3m \cdot 5m \cdot 2m = 30m^3}$

Volumen gesamt:

$\boldsymbol{V_{gesamt} = V_1 + V_2}$

$\boldsymbol{V_{gesamt} = 12m^3 + 30m^3 = 42m^3}$

Mathematik 6	M 6.3 Prozentrechnung, Daten und Diagramme (1)	*AKG Schwabach*

Prozentbegriff:

Prozent = andere Bezeichnung für Hundertstel; kleinere Anteile = Promille (Tausendstel)

$\mathbf{70\% = \frac{70}{100} = 0,7}$ $\mathbf{5\% = \frac{5}{100} = 0,05}$ $\mathbf{9‰ = \frac{9}{1000} = 0,009}$

Absolute und relative Häufigkeit:

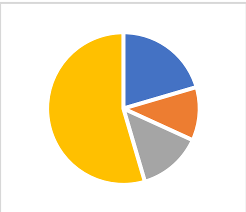
Absolute Häufigkeiten sind Anzahlen. Relative Häufigkeiten sind Anteile, die in Prozentschreibweise angegeben werden.

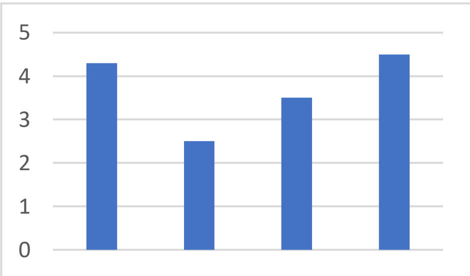
$$\boxed{relative\ Häufigkeit = \frac{absolute\ Häufigkeit}{Gesamtzahl}}$$

Bsp.: Bei einer Blitzerkontrolle fuhren 30 von 120 Fahrzeugen zu schnell. Gib die absolute und die relative Häufigkeit an.

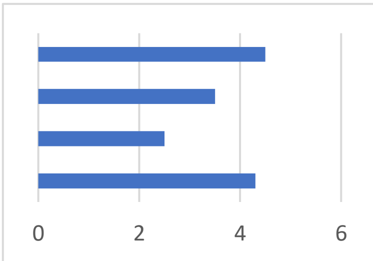
Lösung: absolute Häufigkeit: 30 relative Häufigkeit: $\frac{30}{120} = 25\%$

Diagramme:


Kreisdiagramm



Säulendiagramm



Balkendiagramm


Streifendiagram

Mathematik 6	M 6.3 Prozentrechnung, Daten und Diagramme (2)	*AKG Schwabach*

Grundgleichung der Prozentrechnung:

Prozentsatz vom Grundwert ist Prozentwert

$$\boldsymbol{Prozentsatz \cdot Grundwert = Prozentwert}$$

$$PS \cdot GW = PW$$

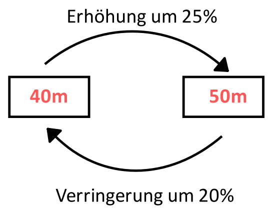
$$\boldsymbol{Prozentwert : Grundwert = Prozentsatz} \qquad \boldsymbol{Prozentwert : Prozentsatz = Grundwert}$$

Bsp.: Der Preis eines Fahrrads wurde von ursprünglich 500€ um 20% reduziert. Berechne den neuen Preis.
Lösung: Grundwert: 500 € Prozentsatz: 80%

$$\boldsymbol{Prozentsatz \cdot Grundwert = Prozentwert \rightarrow 0{,}8 \cdot 500€ = \frac{80}{100} \cdot 500€ = 80 \cdot 5€ = 400€}$$

Antwort: Das Fahrrad kostet jetzt 400€.

Prozentuale Änderung:
Bei der Berechnung von Prozentwerten und Prozentsätzen ist es entscheidend, auf welchen Grundwert sich die gegebenen Angaben beziehen.
Bsp: 50m ist um 25% länger als 40m (→ Grundwert: 40m)
40m ist um 20% kürzer als 50m (→ Grundwert: 50m)



Arithmetisches Mittel:

$$arithmetisches\ Mittel = \frac{Summe\ der\ einzigen\ Werte}{Gesamtzahl\ an\ Werten}$$

Bsp.: Bei einer fünftägigen Wanderung wurden pro Tag die Streckenlängen 12km, 16km, 8km, 22km und 14km zurückgelegt. Berechne das arithmetische Mittel.

$$\frac{12+16+8+22+14}{5} = 14{,}4$$