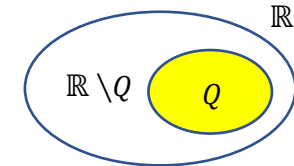


**Reelle Zahlen:**

Reelle Zahlen  $\mathbb{R}$   
=  
rationale Zahlen  $Q$  + irrationale Zahlen  $\mathbb{R} \setminus Q$



endliche/ unendlich periodische Dezimalbrüche  
(und alle Zahlen, die sich als solche darstellen lassen)

Zahlen, die sich nicht als Brüche darstellen lassen

**Beispiele:**

- $3; \frac{4}{5}; 2,5; 0,\bar{3}; \sqrt{16} \in Q \rightarrow 3; \frac{4}{5}; 2,5; 0,\bar{3}; \sqrt{16} \in \mathbb{R}$
- $2,101024 \dots; \sqrt{3}; \sqrt{10}; \pi$  sind irrationale Zahlen  $\rightarrow 2,101024 \dots; \sqrt{3}; \sqrt{10}; \pi \in \mathbb{R}$

**Quadratwurzeln:**

Die **Quadratwurzel** (kurz: **Wurzel**) von  $a$  ( $a \geq 0$ ) ist diejenige nicht negative Zahl, die quadriert  $a$  ergibt.  
Schreibweise:  $\sqrt{a}$  ( $a$  heißt **Radikand**)  
(Bsp.:  $\sqrt{16} = 4$ , da  $4^2 = 16$ )

**ACHTUNG:**

- Aus negativen Zahlen kann man keine Wurzel ziehen!
- Für  $a \in \mathbb{R}$  gilt:  $\sqrt{a^2} = |a|$  (Bsp.:  $\sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8$ )

Mathematik 9	M 9.1 Quadratwurzeln (2)		AKG Schwabach
<p><b>Rechenregeln für Quadratwurzeln:</b></p> <p><b>Multiplikationsregeln:</b> <math>\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}</math> für <math>a, b \geq 0</math></p> <p><b>Divisionsregeln:</b> <math>\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}</math> für <math>a \geq 0, b &gt; 0</math></p> <p>auch: <math>\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}</math></p> <p><b>Beispiel:</b> <math>\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6</math></p> <p><math>\sqrt{75} : \sqrt{3} = \sqrt{75 : 3} = \sqrt{25} = 5</math></p> <p style="text-align: center;"><b>ABER:</b> <math>\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a + b}</math> für <math>a, b &gt; 0</math></p>			
<p><b><u>Teilweises Wurzelziehen/Radizieren:</u></b></p> <p>Wenn ein Radikand so in ein Produkt zerlegt werden kann, dass man aus wenigstens einem Faktor die Wurzel ziehen kann, so nennt man dies <b>teilweises Wurzelziehen/Radizieren</b>.</p> <p>Bsp.: <math>\sqrt{125} = \sqrt{25 \cdot 5} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5}</math>  <math>\sqrt{y^3} = \sqrt{y^2 \cdot y} = y\sqrt{y}</math></p>	<p><b><u>Wurzelziehen mit binomischen Formeln:</u></b></p> <p><i>Vorgehen:</i> Man formt die Summe/Differenz in ein Produkt um.</p> $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = \sqrt{(a + b)^2} =  a + b $ $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \sqrt{(a - b)^2} =  a - b $	<p><b><u>Rationalmachen des Nenners:</u></b></p> <p><i>Vorgehen:</i> Man erweitert den Bruchterm mit Wurzel im Nenner so, dass ein äquivalenter <b>Term ohne Wurzel im Nenner</b> entsteht.</p> $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\frac{5}{\sqrt{3} + 1} = \frac{5 \cdot (\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1) \cdot (\sqrt{3} - 1)} = \frac{5 \cdot (\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3}^2 - 1}$ $= \frac{5 \cdot (\sqrt{3} - 1)}{2}$	

**Quadratische Funktionen:**

Funktionen der Form  $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) heißen quadratische Funktionen.

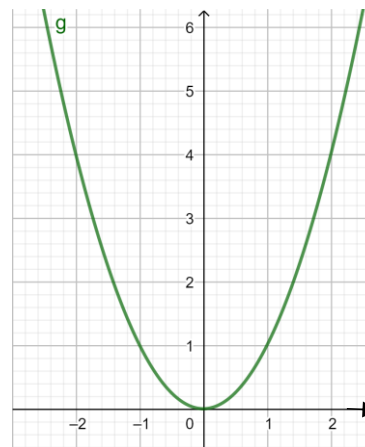
- Der Graph einer quadratischen Funktion heißt **Parabel**.
- Der Graph von  $g: x \mapsto x^2$  heißt **Normalparabel**.
- Der tiefste Punkt/der höchste Punkt einer Parabel heißt **Scheitelpunkt** oder kurz **Scheitel**.

Die Parabel zur Funktion  $f$  ist

- nach oben geöffnet, falls  $a > 0$ .
- nach unten geöffnet, falls  $a < 0$ .

Die Parabel zur Funktion  $f$  ist

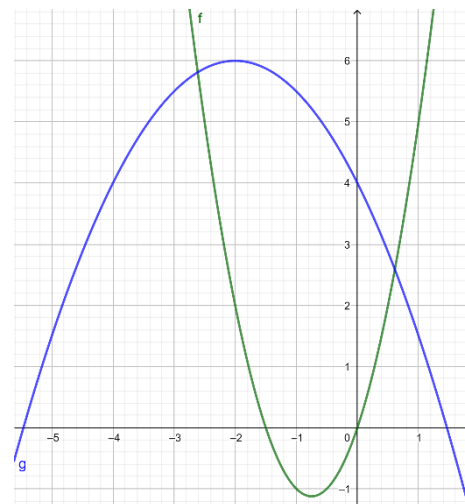
- weiter als die Normalparabel, falls  $|a| > 1$ .
- enger als die Normalparabel, falls  $|a| < 1$ .



$$g: x \mapsto x^2$$

Die Normalparabel hat den Scheitel  $(0|0)$ .

Die Normalparabel ist nach oben geöffnet.



$$f: x \mapsto 2x^2 + 3x$$

und

$$g: x \mapsto -0,5x^2 - 2x + 4$$

sind quadratische Funktionen.

**Scheitelpunktform von quadratischen Funktionen:**

Jede quadratische Funktion der Form  $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) lässt sich durch quadratische Ergänzung auf die Scheitelpunktform  $f: x \mapsto a(x + d)^2 + e$  bringen.

- Der Scheitel der zugehörigen Parabel von  $f$  lässt sich von der Scheitelpunktform ablesen:  $S(-d|e)$   
Bsp.:  $f: x \mapsto 2(x - 3)^2 + 4 \rightarrow S(3|4)$
- Wertemenge von  $f$ :  
 $W = [e; \infty[$  für  $a > 0$   
 $W = ] - \infty; e]$  für  $a < 0$   
Bsp.:  $f: x \mapsto 2(x - 3)^2 + 4$   
 $\rightarrow W = [4; \infty[$

**Quadratische Ergänzung:**

Idee: Man ergänzt die Gleichung so, dass eine binomische Formel entsteht.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 5x - 3 \\ &= 2(x^2 - 2,5x \quad \quad \quad - 1,5) \\ &= 2(x^2 - 2 \cdot 1,25 \cdot x \quad \quad \quad - 1,5) \\ &= 2(x^2 - 2 \cdot 1,25 \cdot x + 1,25^2 - 1,25^2 - 1,5) \\ &= 2(x^2 - 2 \cdot 1,25 \cdot x + 1,25^2 - 1,5625 - 1,5) \\ &= 2(x - 1,25)^2 - 2 \cdot 3,0625 \\ &= 2(x - 1,25)^2 - 6,125 \end{aligned}$$

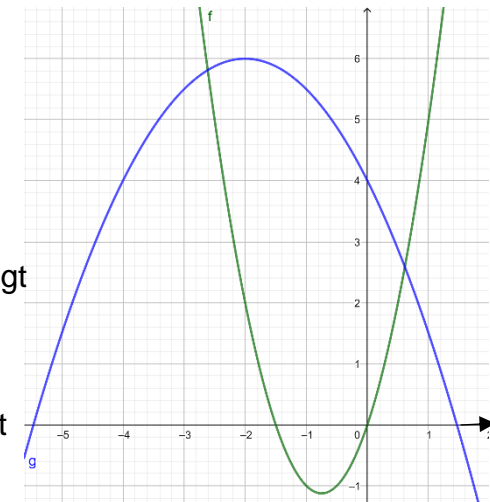
- $S(1,25|6,125)$
- $W = [-6,125; \infty[$

**Monotonieverhalten:**

Gegeben sind  
 $f: x \mapsto 2x^2 + 3x$  und  
 $g: x \mapsto -0,5x^2 - 2x + 4$

$a > 0$ : Die Parabel fällt links des Scheitels und steigt rechts davon.

$a < 0$ : Die Parabel steigt links des Scheitels und fällt rechts davon.



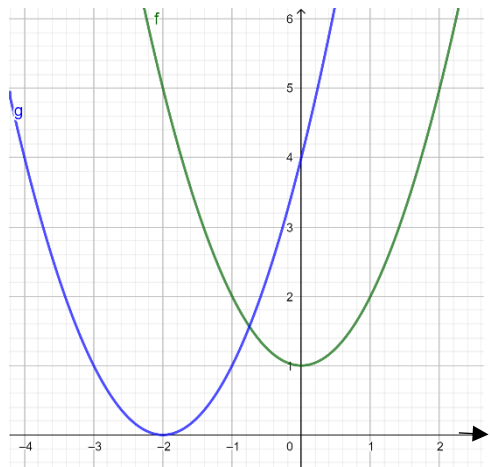
**Sonderfälle:**

$f: x \mapsto x^2 + e$   
Scheitelpunkt  $S(0|e)$

Bsp.:  
 $f: x \mapsto x^2 + 1$   
Scheitelpunkt  $S(0|1)$

$g: x \mapsto (x + d)^2$   
Scheitelpunkt  $S(-d|0)$

Bsp.:  
 $g: x \mapsto (x + 2)^2$   
Scheitelpunkt  $S(-2|0)$



**Lösungsformel für quadratische Gleichungen:**

Für eine quadratische Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) gilt:

Die **Diskriminante D** ist wie folgt definiert:  $b^2 - 4ac$

Die Diskriminante D ist

- $< 0$ : Die Gleichung hat **keine** Lösung.
- $= 0$ : Die Gleichung hat **genau eine Lösung**  $x = \frac{-b}{2a}$ .
- $> 0$ : Die Gleichung hat **zwei Lösungen** (= Nullstellen von  $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ )

Die Lösungen werden mit der Lösungsformel berechnet:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**Bsp.: Bestimme alle Lösungen der gegebenen Gleichung**  
 $2x^2 - 12x + 10 = 0$

**Bestimme D:**  $b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = 144 - 80 = 64 > 0$   
→ Die Gleichung besitzt zwei Lösungen.

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 2} = \frac{12 \pm 8}{4}$$

$$x_1 = \frac{12 + 8}{4} = \frac{20}{4} = 5 \quad x_2 = \frac{12 - 8}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

**Darstellungsformen für Funktionsterme von quadratischen Funktionen:**

Allgemeine Form:  $f(x) = ax^2 + bx + c$   
→  $f(0) = c$

Scheitelpunktform:  $f(x) = a(x + d)^2 + e$   
→  $S(-d|e)$

Nullstellenform:  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$   
→ Nullstellen:  $x_1$  und  $x_2$

**Bsp.:**  $f: x \mapsto 2x^2 - 12x + 10$

**Allgemeine Form:**  $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$   
→  $f(0) = 10$

**Scheitelpunktform:**  $f(x) = 2(x - 3)^2 - 8$   
→  $S(3|-8)$

**Nullstellenform:**  $f(x) = 2(x - 5)(x - 1)$   
→ Nullstellen: 5 und 1

**Lineares Gleichungssystem (LGS) mit drei Variablen lösen:**

Schritte	Beispiel
1. Auflösen einer Gleichung nach einer Variablen	$(I) 2a - 2b + c = -1$ $(II) a + c = 4b$ $(III) 2a = 12 - 4c \rightarrow (III') a = 6 - 2c$
2. Einsetzen des ermittelten Terms in die beiden anderen Gleichungen	$(III') \text{ in } (I): 2(6 - 2c) - 2b + c = -1$ $12 - 4c - 2b + c = -1 \leftrightarrow 12 - 3c - 2b = -1 \leftrightarrow 13 - 3c - 2b = 0 \text{ (I')}$ $(III') \text{ in } (II): 6 - 2c + c = 4b \leftrightarrow 6 - c - 4b = 0 \leftrightarrow 6 - 4b = c \text{ (II')}$
3. Lösen des Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten	$(II') \text{ in } (I'): 13 - 3(6 - 4b) - 2b = 0$ $13 - 18 + 12b - 2b = 0$ $-5 + 10b = 0$ $10b = 5 \leftrightarrow b = \frac{1}{2}$ <i>Berechne c: b in (II')</i> : $c = 6 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 6 - 2 = 4$
4. Einsetzen der Lösung in die erste Gleichung zur Bestimmung der dritten Unbekannten	<i>Setze c in (III') ein:</i> $a = 6 - 2 \cdot 4 = 6 - 8 = -2$  <i>Die Lösung ist</i> $a = -2; b = \frac{1}{2}; c = 4$

**Funktionsterm einer Parabel bestimmen:**

*Voraussetzung:* Es müssen Punkte gegeben sein, die auf der Parabel liegen. Je nachdem, um welche Art der Punkte es sich handelt, wählt man einen geeigneten Ansatz:

- Allgemeine Form:  $f(x) = ax^2 + bx + c$
- Scheitelpunktform:  $f(x) = a(x + d)^2 + e$
- Nullstellenform:  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

<b>Allgemeine Form:</b> $f(x) = ax^2 + bx + c$	<b>Scheitelpunktform:</b> $f(x) = a(x + d)^2 + e$	<b>Nullstellenform:</b> $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
<p>→ Es sind <b>drei beliebige Punkte</b> gegeben.</p> <p>Aufstellen des Funktionsterms mithilfe eines linearen Gleichungssystems mit drei Unbekannten.</p> <p><b>Bsp.: <math>A(-3 1), B(1 2), C(2 3, 5)</math></b></p> <p><b>Stelle ein Gleichungssystem auf:</b></p> <p>(I) <math>1 = 9a - 3b + c</math>                      (II) <math>2 = a + b + c</math>                      (III) <math>3, 5 = 4a + 2b + c</math></p> <p><b>Löse das LGS mit drei Unbekannten.</b></p>	<p>→ Es ist <b>der Scheitel und ein weiterer beliebiger Punkt</b> gegeben.</p> <p>Einsetzen des Scheitels. Berechnen von a mittels des zweiten Punktes.</p> <p><b>Bsp.: <math>S(2 -3), P(-2 5)</math></b></p> $f(x) = a(x - 2)^2 - 3$ <p><b>P in <math>f(x)</math>: <math>5 = a(-2 - 2)^2 - 3</math></b></p> $5 = 16a - 3$ $16a = 8 \leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ $f(x) = \frac{a}{2}(x - 2)^2 - 3$	<p>→ Es sind <b>die Nullstellen und ein weiterer beliebiger Punkt</b> gegeben.</p> <p>Einsetzen der Nullstellen. Berechnen von a mittels des zweiten Punktes.</p> <p><b>Bsp.: <math>N_1(-2 0), P(2 3, 6), N_2(3 0)</math></b></p> $f(x) = a(x + 2)(x - 3)$ <p><b>P in <math>f(x)</math>: <math>3, 6 = a(2 + 2)(2 - 3)</math></b></p> $3, 6 = -4a$ $a = -0, 9$ <p>→ <math>f(x) = -0, 9(x + 2)(x - 3)</math></p>

**Extremwertaufgaben lösen:**

*Voraussetzung:* Eine Größe muss als quadratische Funktion mit nur einer Variablen ausgedrückt werden können.

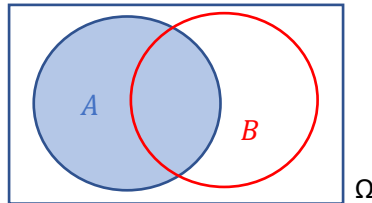
Bestimmung des Extremwertes (größter bzw. kleinster Wert):

Vorgehen	Beispiel
1. Aufstellen eines Ansatzes für die Größe, die extrem werden soll	<p>Gegeben ist ein Rechteck mit <math>U = 48\text{cm}</math>. Sein Flächeninhalt soll maximal sein. Bestimme die Maße des Rechtecks und gib den Flächeninhalt an.</p> <p style="text-align: center;"><math>A(x; y) = x \cdot y</math> (<math>x, y</math> sind die Seitenlängen des Rechtecks und <math>A</math> damit der Flächeninhalt)</p>
2. Aufstellen von Gleichungen, die die Beziehungen zwischen den Variablen beschreiben	<p><math>U = 2x + 2y = 48</math> (Umfang des Rechtecks)  <math>y = 24 - x</math> (Auflösen nach einer Variablen)</p>
3. Bestimmen eines Funktionsterms für die gesuchte Größe in Abhängigkeit von nur einer Variablen	<p><math>A(x) = x \cdot (24 - x); \quad 0 &lt; x &lt; 24</math></p>
4. Ermitteln des Scheitelpunktes und Angabe des Extremwertes	<p>Nullstellen bei <math>x_1 = 0</math> und <math>x_2 = 24</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>→ <math>x</math> – Koordinate des Scheitels: <math>x_s = \frac{0+24}{2} = 12</math></li> <li>→ Extremwert: <math>A(x_s) = 12 \cdot (24 - 12) = 144</math></li> <li>→ <math>y = 24 - 12 = 12</math></li> </ul> <p>Das Rechteck hat die Maße <math>x = 12\text{cm}</math> und <math>y = 12\text{cm}</math> und den Flächeninhalt <math>144\text{cm}^2</math>.</p>

**Schnittpunkte von Funktionsgraphen bestimmen:**

Vorgehen	Beispiel
<p>1. Gleichsetzen der beiden Funktionsterme</p>	<p>Gegeben sind die Funktionen <math>f: x \mapsto x^2 - x + 3</math> und <math>g: x \mapsto 2x + 1</math> mit maximaler Definitionsmenge. Bestimme die Schnittpunkte der zugehörigen Graphen.</p> $f(x) = g(x)$ $x^2 - x + 3 = 2x + 1$ $x^2 - 3x + 2 = 0$
<p>2. Lösen der Gleichung (z.B. mittels Lösungsformel)</p>	$x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2}$ $x_1 = \frac{4}{2} = 2 \quad x_2 = \frac{2}{2} = 1$
<p>3. Berechnen der y- Koordinate durch Einsetzen der berechneten x-Koordinate in einen Funktionsterm</p>	$g(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \rightarrow S_1(2 5)$ $g(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \rightarrow S_2(1 3)$

**Mengendiagramme:**

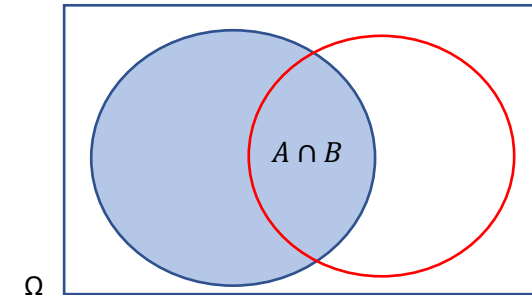


- Zur Darstellung von Verknüpfungen zweier Ereignisse A und B.
- Oft interessiert man sich für die Schnitt- und Vereinigungsmenge.

Bsp.: Einmaliger Würfelwurf mit  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$   
*A: gerade Augenzahl*  $A = \{2; 4; 6\}$   
*B: Augenzahl größer 3*  $B = \{4; 5; 6\}$

**Die Schnittmenge  $A \cap B$ :**

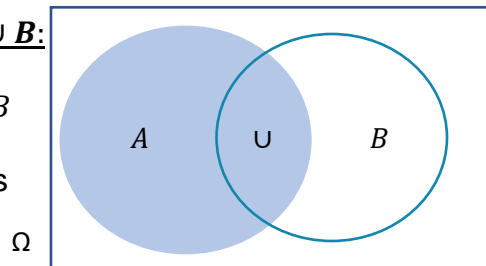
Die Schnittmenge  $A \cap B$  (lies: „A geschnitten B“) zweier Ereignisse A und B besteht aus den Ergebnissen, die in A und in B enthalten sind.



Im Bsp.:  
 $A \cap B = \{4; 6\}$   
 *$A \cap B$ : Alle Ergebnisse, die gerade und größer als 3 sind.*

**Die Vereinigungsmenge  $A \cup B$ :**

Die Vereinigungsmenge  $A \cup B$  (lies: „A vereinigt B“) zweier Ereignisse besteht aus den Ergebnissen, die in A oder B enthalten sind.



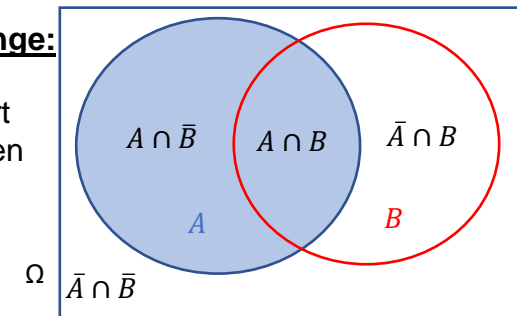
(mathematisch „oder“: „entweder nur in A oder nur in B“ oder „in A und B zusammen“)

Im Bsp.:  
 $A \cup B = \{2; 4; 5; 6\}$

**Zerlegung der Ergebnismenge:**

Jedes Ergebnis  $\omega \in \Omega$  gehört genau einer dieser Teilmengen an:

Im Bsp.:  
 $A \cap \bar{B} = \{2\}$   
 $A \cap B = \{4; 6\}$   
 $\bar{A} \cap B = \{5\}$   
 $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1\}$



**Vierfeldertafel:**

- Darstellung von absoluten Häufigkeiten eines n-mal durchgeführten Zufallsexperiments
- Darstellung der relativen Häufigkeiten eines n-mal durchgeführten Zufallsexperiments (→ können als Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden)

**Beispiel:**

Die Klasse 9c hat 30 Schüler und Schülerinnen. Diese werden befragt, wie oft die Ereignisse S: „Eine Schülerin bzw. ein Schüler ist in einem Sportverein“ und M: „Eine Schülerin bzw. ein Schüler spielt ein Musikinstrument“ in der Klasse auftreten. Das Ereignis S tritt 15-mal und das Ereignis M 12-mal auf. Außerdem zeigt sich, dass 6 Schüler\*innen keine der beiden Freizeitaktivitäten betreiben. Erstelle eine Vierfeldertafel für die absoluten und eine Vierfeldertafel für die relativen Häufigkeiten.

	S	$\bar{S}$	
M	3 $H(M \cap S)$	9 $H(M \cap \bar{S})$	12 $H(M)$
$\bar{M}$	12 $H(\bar{M} \cap S)$	6 $H(\bar{M} \cap \bar{S})$	18 $H(\bar{M})$
	15 $H(S)$	15 $H(\bar{S})$	30 n

H: Häufigkeit

	S	$\bar{S}$	
M	10% $P(M \cap S)$	30% $P(M \cap \bar{S})$	40% $P(M)$
$\bar{M}$	40% $P(\bar{M} \cap S)$	20% $P(\bar{M} \cap \bar{S})$	60% $P(\bar{M})$
	50% $P(S)$	50% $P(\bar{S})$	100%

**Berechnung von  $P(M \cup S)$ :**

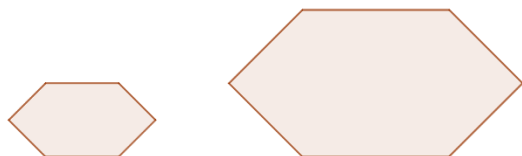
$$P(M \cup S) = P(M \cap S) + P(M \cap \bar{S}) + P(\bar{M} \cap S) \quad \text{oder}$$

$$P(M \cup S) = P(M) + P(S) - P(M \cap S)$$

**Ähnlichkeit:**

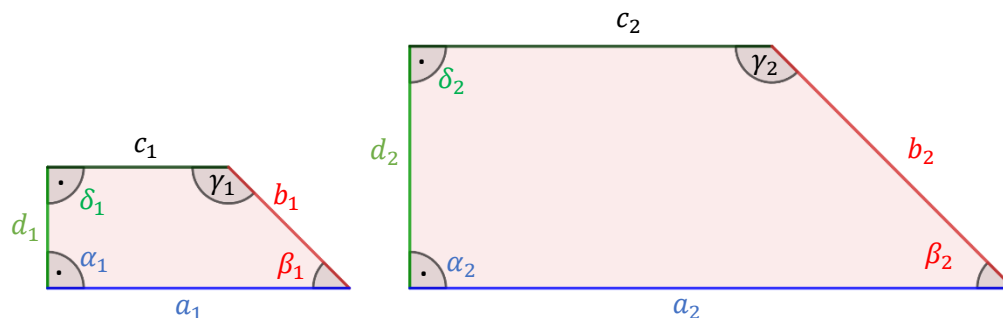
Zwei Figuren bzw. Körper heißen **ähnlich**, wenn man sie durch maßstäbliches Vergrößern/Verkleinern auf zueinander kongruente Figuren abbilden kann. Der Faktor, mit dem alle Streckenlängen multipliziert werden, heißt **Ähnlichkeitsfaktor k**.

Ähnlichkeitsfaktor  $k = 2$ :



**Eigenschaften ähnlicher Figuren:**

- Entsprechende Winkel sind gleich groß:  $\alpha_1 = \alpha_2$ ;  $\beta_1 = \beta_2$ ;  $\gamma_1 = \gamma_2$ ;  $\delta_1 = \delta_2$
- Entsprechende Strecken haben stets das gleiche Längenverhältnis:  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$



**Ähnlichkeitssätze für Dreiecke:**

Dreiecke sind bereits ähnlich, wenn sie

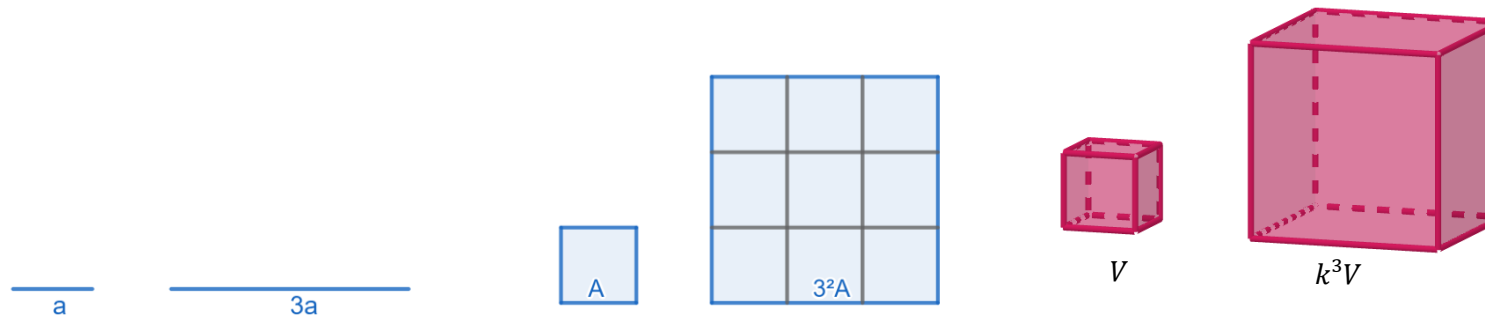
- in zwei (und damit allen drei) Winkeln übereinstimmen (WW-Satz).
- im Verhältnis entsprechender Seitenlängen übereinstimmen (S:S:S-Satz).

**Streckenlängen, Flächeninhalte und Rauminhalte bei Ähnlichkeit:**

Wird die Figur  $F_1$  bzw. der Körper  $K_1$  mit dem Ähnlichkeitsfaktor  $k$  auf eine zu  $F_2$  kongruente Figur bzw. einen zu  $K_2$  kongruenten Körper abgebildet, so gilt:

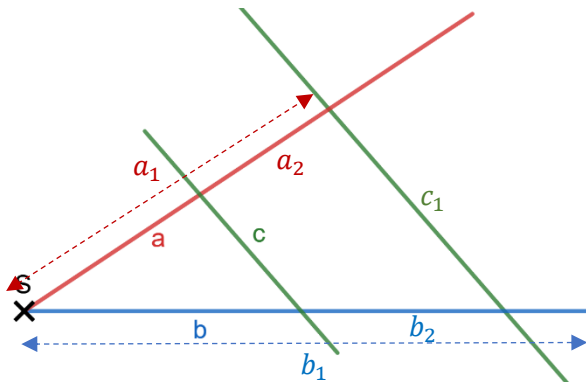
- Jede **Streckenlänge** in  $F_2$  hat den  **$k$ -fachen** Wert der entsprechenden Länge in  $F_1$ .
- Der **Flächeninhalt** von  $F_2$  hat den  **$k^2$ -fachen** Wert des Flächeninhalts von  $F_1$ .
- Das **Volumen** von  $K_2$  hat den  **$k^3$ -fachen** Wert des Volumens von  $K_1$ .

Bsp.: Sei  $k = 3$ :



**Strahlensatz bei der V-Figur:**

Es gilt:  $c \parallel c_1$



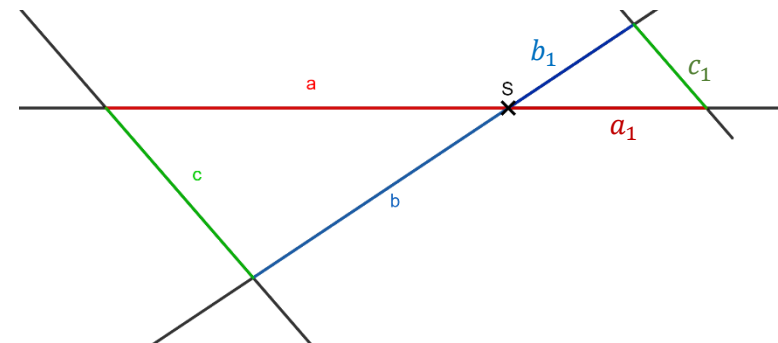
Es gelten die Verhältnisse:

$$1. \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} \quad \text{und} \quad \frac{a_2}{a} = \frac{b_2}{b}$$

$$2. \frac{c_1}{c} = \frac{a_1}{a} \quad \text{und} \quad \frac{c_1}{c} = \frac{b_1}{b}$$

**Strahlensatz bei der X-Figur:**

Es gilt:  $c \parallel c_1$



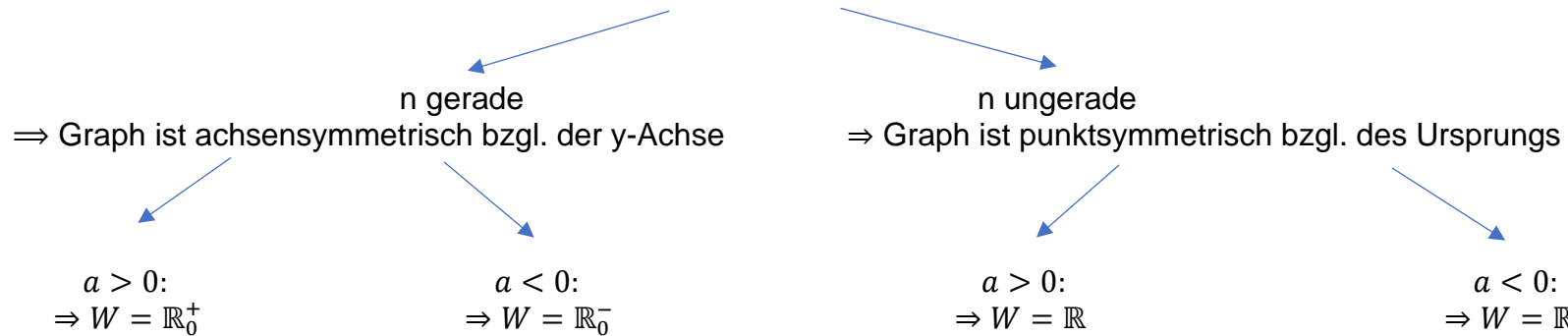
Es gelten die Verhältnisse:

$$1. \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$$

$$2. \frac{c_1}{c} = \frac{a_1}{a} \quad \text{und} \quad \frac{c_1}{c} = \frac{b_1}{b}$$

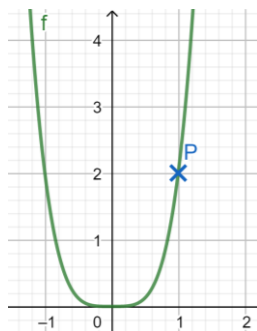
**Potenzfunktionen:**

Eine Funktion  $f: x \mapsto a \cdot x^n$  ( $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ) heißt **Potenzfunktion**.  
Der Exponent  $n$  gibt den **Grad der Potenzfunktion** an.

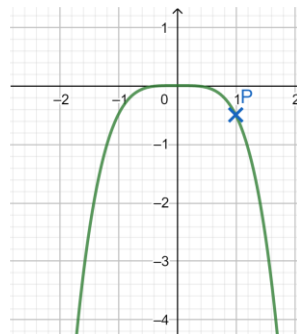


Bsp.:

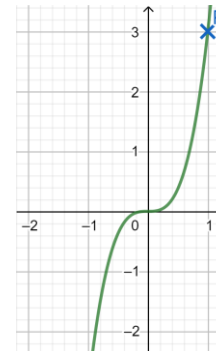
$f: x \mapsto 2 \cdot x^4$



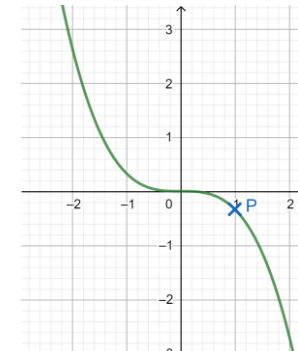
$g: x \mapsto -0,5 \cdot x^4$



$h: x \mapsto 3 \cdot x^3$



$k: x \mapsto -\frac{1}{3} \cdot x^3$



Alle Graphen verlaufen durch die Punkte  $O(0|0)$  und  $P(1|a)$ .

**n-te Wurzeln:**

Die n-te Wurzel von  $a$  ( $a \geq 0$ ) ist diejenige nicht negative Zahl, deren n-te Potenz  $a$  ergibt.

Man schreibt:  $\sqrt[n]{a}$  ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ )


**Bsp.:**

$\sqrt[3]{27} = 3$ , denn  $3^3 = 27$

$\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{2}$

**Potenzgleichungen:**

$x^n = c$  ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ )

n gerade		n ungerade	
$c > 0$	$c < 0$	$c > 0$	$c < 0$
zwei Lösungen $x_1 = \sqrt[n]{c};$ $x_2 = -\sqrt[n]{c};$	keine Lösung	eine Lösung $x = \sqrt[n]{c}$	eine Lösung $x = -\sqrt[n]{ c }$
$x^4 = 2$ $x_1 = \sqrt[4]{2};$ $x_2 = -\sqrt[4]{2};$	$x^4 = -2$ 	$x^3 = 2$ $x = \sqrt[3]{2}$	$x^3 = -2$ $x = -\sqrt[3]{2}$

**Schnittpunkte von Graphen zweier Potenzfunktionen:**

Gegeben sind zwei Potenzfunktionen  $f$  und  $g$  mit den zugehörigen Funktionsgraphen.

Vorgehen zur Berechnung von Schnittpunkten:

- Forme die Gleichung  $f(x) = g(x)$  zu  $f(x) - g(x) = 0$  um.
- Löse die Gleichung  $f(x) - g(x) = 0$  durch Ausklammern.
- Setze die x-Koordinaten in  $f(x)$  oder  $g(x)$  ein, um die zugehörigen y-Koordinaten zu erhalten.

**Bsp.:**

**Geg.:**  $f: x \mapsto 12x^4; g: x \mapsto 1,5x^7$

**Berechne die Schnittpunkte der zu  $f$  und  $g$  gehörenden Funktionsgraphen.**

$f(x) - g(x) = 0$   
 $12x^4 - 1,5x^7 = 0$   
 $1,5x^4(8 - x^3) = 0$

$\rightarrow x_1 = 0 \quad f(0) = 0 \rightarrow S_1(0|0)$

$\rightarrow 8 - x^3 = 0$

$x^3 = 8 \rightarrow x_2 = \sqrt[3]{8} = 2$

$f(2) = 12 \cdot 2^4 = 12 \cdot 16 = 192 \rightarrow S_2(2|192)$

**Potenzen mit rationalen Exponenten und allgemeine Wurzeln:**Für  $a > 0, z \in \mathbb{Z}$  und  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  gilt:

$$a^{\frac{z}{n}} = \sqrt[n]{a^z}$$

$$a^{-\frac{z}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^z}}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

**Bsp.:**

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

$$7^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{7^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{49}}$$

$$256^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{4^4} = 4$$

**Potenzgesetze:**Für  $a, b > 0$  und rationale Exponenten  $r$  und  $s$  gilt:

1. Potenzen mit gleicher Basis:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{2}{4}} = 3^{\frac{1+2}{4}} = 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{27}$$

$$5^{\frac{2}{3}} : 5^{\frac{4}{3}} = 5^{\frac{2-4}{3}} = 5^{-\frac{2}{3}}$$

2. Potenzen mit gleichem Exponenten:

$$a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r \quad \text{bzw.} \quad \frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$$

$$a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{4}} = (ab)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{ab} \quad \text{bzw.} \quad \frac{5^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{3}\right)^2}$$

3. Potenzen von Potenzen:

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

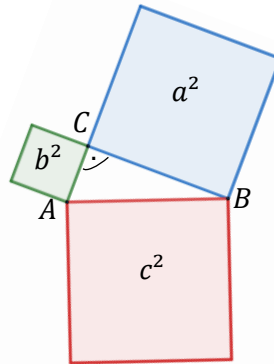
$$\left(a^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1 \cdot 1}{5 \cdot 3}} = a^{\frac{1}{15}}$$

**Satz des Pythagoras:**

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die **Summe der Flächeninhalte der beiden Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrats.**

Für ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse c und Katheten a und b gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



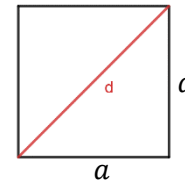
**Kehrsatz zum Satz des Pythagoras:**

Wenn für die Seiten a, b und c eines Dreiecks die Gleichung  $a^2 + b^2 = c^2$  gilt, dann hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel.

**Nützliche Formeln:**

Diagonale d eines Quadrats mit der Seitenlänge a:

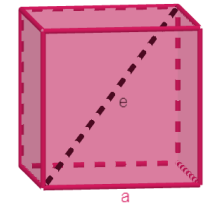
$$d = a\sqrt{2}$$



Bsp.:  $a = 3\text{cm}$   
 $\rightarrow d = 3\sqrt{2}\text{cm} \approx 4,24$

Raumdiagonale e eines Würfels mit der Kantenlänge a:

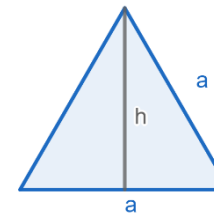
$$e = a\sqrt{3}$$



Bsp.:  $a = 4\text{cm}$   
 $\rightarrow e = 4\sqrt{3}\text{cm} \approx 6,93\text{cm}$

Höhe h im gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a:

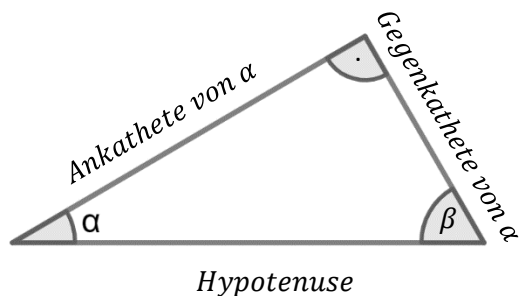
$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$



Bsp.:  $a = 4\text{cm}$   
 $\rightarrow h = \frac{4}{2}\sqrt{3}\text{cm} \approx 3,46\text{cm}$

**Sinus, Kosinus und Tangens:**

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck:



Es gilt:

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$$

$$\begin{aligned} \sin 0^\circ &= 0; & \sin 90^\circ &= 1 \\ \cos 0^\circ &= 1; & \cos 90^\circ &= 0 \end{aligned}$$

**Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens:**

Für alle  $\alpha$  mit  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$  gilt:

1.  $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$  bzw.  $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$
2.  $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$
3.  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  ( $\alpha \neq 90^\circ$ )

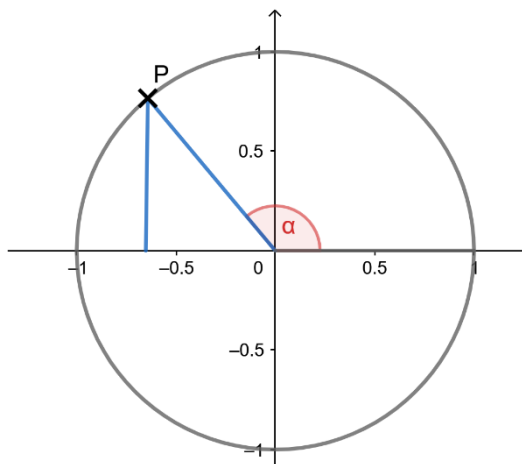
**Bsp.:**

$$(\tan \alpha \cdot \cos \alpha)^2 + \sin^2(90^\circ - \alpha) =$$

$$\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha =$$

$$(\sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

**Sinus und Kosinus am Einheitskreis:**



Gegeben ist  $P(x|y)$ , ein Punkt auf dem Einheitskreis und  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ ) mit der positiven x-Achse als erstem und der Strecke  $\overline{OP}$  als zweitem Schenkel.

Es wird festgelegt:

$\cos \alpha = x$ $\sin \alpha = y$
-------------------------------------

**Sinussatz:**

In jedem Dreieck ABC verhalten sich die Längen zweier Seiten wie die Sinuswerte ihrer Gegenwinkel.

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}; \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}; \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

**Bsp.:**

**Gegeben:**  $b = 3\text{cm}$ ,  $c = 4\text{cm}$  und  $\gamma = 45^\circ$

**Ges.:**  $\beta$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \rightarrow \sin \beta = \sin \gamma \cdot \frac{b}{c} = \sin 45^\circ \cdot \frac{3}{4} \approx 0,53 \rightarrow \beta \approx 32,01^\circ$$

**Kosinussatz:**

In jedem Dreieck ABC gilt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

**Bsp.:**

**Gegeben:**  $a = 5\text{cm}$ ,  $b = 6\text{cm}$  und  $c = 4\text{cm}$ .

**Ges.:**  $\alpha$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{36\text{cm}^2 + 16\text{cm}^2 - 25\text{cm}^2}{2 \cdot 6\text{cm} \cdot 4\text{cm}} = \frac{27}{48} \rightarrow \alpha \approx 55,77^\circ$$

